Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

Grifone
Dreveton - Lhabou
Gourdon (dev 1)
Isenmann (dev 2)

On considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

I. Généralités sur les systèmes linéaires

1. Vocabulaire

Définition 1.1 On appelle système linéaire de p équations en n inconnues un système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ et les b_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

On appelle solution tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ dont les composantes x_i satisfont toutes les équations.

Définition 1.2 Le système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Remarque 1.3 Soient $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système se réécrit alors sous forme matricielle : $AX = B$.

Définition 1.4 On appelle rang du système, le rang de la matrice A.

2. Systèmes de Cramer

Définition 1.5 On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice A associée est carrée et inversible.

Remarque 1.6 Il s'agit donc d'un système linéaire à n équations, n inconnues et de rang n.

Proposition 1.7 Un système de Cramer admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Théorème 1.8 (formules de Cramer) On note $c_1, \dots, c_n$ les colonnes de A carrée inversible. Alors le système de Cramer associé à A et B admet une unique solution donnée par : $x_i = \dfrac{\det(c_1, \dots, c_{i-1}, B, c_{i+1}, \dots, c_n)}{\det A}$.

Exemple 1.9

Soit le système $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4x - 6z = 5 \end{cases}$

On a $\det A = -46$ donc c'est un système de Cramer.

Les formules de Cramer donnent :

$$x = \frac{-1}{46}\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 5 \qquad y = \frac{-1}{46}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 1 \qquad z = \frac{-1}{46}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Remarque 1.10 Cette méthode de résolution a un coût très élevé en $O((n+2)!)$ et donc ne sera pas utilisé pour n non petit (et même très petit).

II. La résolution en pratique

1. Opérations élémentaires

Définition 2.1 On appelle opérations élémentaires sur une matrice, les opérations suivantes :

- échanger deux lignes (resp. colonnes)
- multiplier une ligne (resp. colonne) par un scalaire non nul
- ajouter à une ligne (resp. colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes)

Définition 2.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle :

- matrice de dilation $D_i(\lambda) := I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$
- matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda) := I_n + \lambda E_{i,j}$
- matrice de permutation $P_{(i,j)} := I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i}$

Proposition 2.3 On a les correspondances suivantes :

$D_i(\lambda)A$	$T_{ij}(\lambda)A$	$P_{(i,j)}A$	$AD_i(\lambda)$	$AT_{ij}(\lambda)$	$AP_{(i,j)}$
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$	$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$C_i \leftrightarrow C_j$

Théorème 2.4 Les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{K})$.
D'autre part, les matrices de transvection engendrent $SL_n(\mathbb{K})$.

développement 1

Définition 2.5 On appelle pivot d'une ligne non nulle le coefficient non nul situé dans la colonne la plus à gauche.
Une matrice est dite échelonnée lorsqu'elle vérifie :

- si une ligne est nulle toutes les lignes suivantes sont nulles
- le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que le pivot de la ligne précédente

Définition 2.6 Une matrice échelonnée est dite réduite si les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Exemples 2.7

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est échelonnée} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ ne l'est pas}$$

Théorème 2.8 Le groupe $GL_m(\mathbb{K})$ agit à gauche sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
De plus, deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles sont dans l'orbite d'une même matrice échelonnée réduite.

2. Méthode du pivot de Gauss

Proposition 2.9 L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si on effectue une des opérations élémentaires sur les équations du système.

Proposition 2.10 (méthode du pivot)

1) échanger éventuellement les lignes des équations et variables pour que le pivot soit non nul

2) échelonner le système

3) cas 1 : il y a une équation du type $0x_1 + \dots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$
alors le système est incompatible

cas 2 : sinon, s'il se présente une équation du type $0x_1 + \dots + 0x_n = 0$ elle peut être écartée.
On aboutit à un système de type
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ddots \qquad \vdots \\ a_{ps}x_s + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

↳ cas a) : il n'y a pas de variable libre : il y a une unique solution

↳ cas b) : il y a des variables libres : il y a une infinité de solutions

Remarque 2.11 Dans le cadre d'un système de Cramer, on obtient $PAX = PB$ avec PA échelonnée de rang n. On obtient X par remontée.
Le coût de la résolution par la méthode du pivot est en $O(n^3)$.

Application 2.12 Cette méthode est utilisée pour : le calcul d'inverse, déterminer le rang d'une matrice, ...

III _ Méthode itérative de résolution

Lemme 3.1 (Householder) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que la norme subordonnée $|||.|||$ vérifie $|||A||| < \rho(A) + \varepsilon$.

Définition 3.2 On considère le système de Cramer $AX = B$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose que A se décompose sous la forme $A = M - N$ où $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit la suite des itérés $(x_k)_k$ par récurrence : $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + B)$.

Théorème 3.3 La suite $(x_k)_k$ converge vers X quelque soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

développement 2

Définition 3.4 On parle de méthode de Jacobi lorsque $M = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ et $N = M - A$.

Exemple 3.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 3.6 La méthode de Gauss - Seidel correspond à $M = L + D$ et $N = -U$ où L ("lower") est la partie triangulaire inférieure de A, D sa diagonale et U ("upper") la partie triangulaire supérieure.

Exemple 3.7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 3.8 On parle de méthode de relaxation de paramètre $\omega > 0$ lorsque $N = \frac{1}{\omega} D + L$ et $N = -U + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D$.

Exemple 3.9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 & 0 \\ 1 & 2/\omega & 0 \\ 0 & 1 & 3/\omega \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1/\omega - 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2(1/\omega - 1) & -1 \\ 0 & 0 & 3(1/\omega - 1) \end{pmatrix}$$